

【1】慶應義塾大学理工学部

1.

1) まず、摩擦がどこにもかからない場合を考える。

(ア) 小物体と容器が衝突することから、運動量保存則より、以下の式が成り立つ。

$$M_1V_0 + 0 = M_1V'_1 + M_2V'_2$$

( $V'_1$  : 衝突後の小物体の速度、 $V'_2$  : 衝突後の容器の速度)

また、この衝突は弾性衝突なので、以下の式が成り立つ。

$$1 = -\frac{V'_1 - V'_2}{V_0} \Leftrightarrow V_0 = -(V'_1 - V'_2)$$

以上より、 $V'_2$  を消去すると、 $V'_1$  が求まる。

$$\therefore V'_1 = \frac{M_1 - M_2}{M_1 + M_2} V_0$$

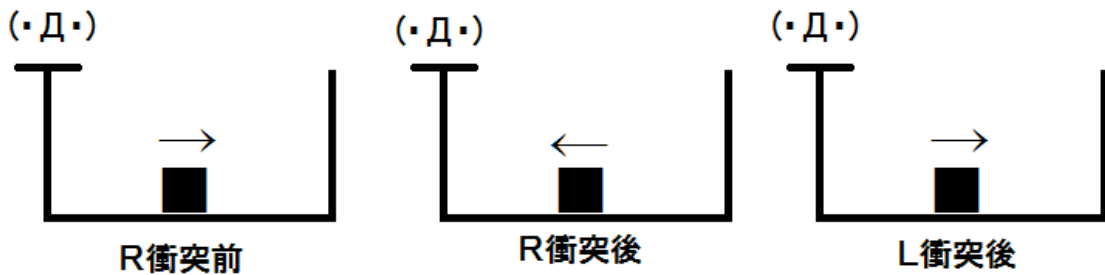
(イ) 容器に対する小物体の相対速度は、弾性衝突を表す式から、以下の式で表される。

$$V'_1 - V'_2 = -V_0$$

(ウ) 以上のことから、この小物体は容器から見ると速さ  $V_0$  (等速) で R と L の間を往復運動していることが分かる。L 衝突後の小物体の容器に対する相対速度は…

$$V_0 = (-1)(-V_0)$$

…と表せる。



(エ) 往復にかかる時間(間隔)を  $T_0$  とすると、以下の関係が成り立つ。

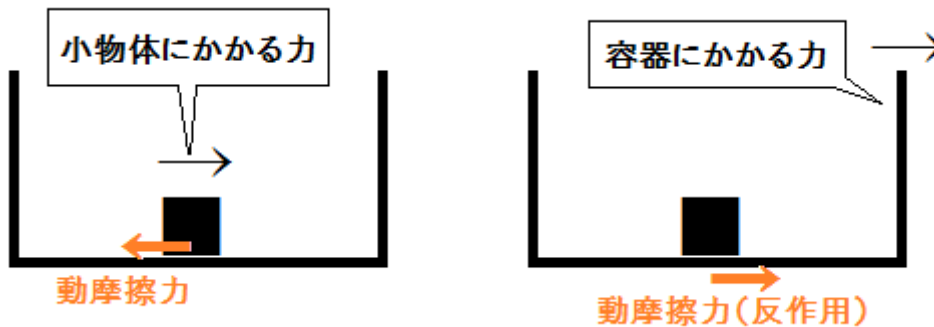
$$2d = V_0 T_0 \rightarrow \therefore T_0 = \frac{2d}{V_0}$$

2) 小物体と容器の間のみ摩擦がある場合を考える。

(オ) 静止していた容器が加速度を生じて動き始めるのは、小物体からの動摩擦力の反作用を正の向きに受けるためである。容器に生じる加速度を  $a_2$  とする。

小物体が受ける動摩擦力を  $f$  とすると、 $f = -\mu' M_1 g$  であるので、容器における運動方程式は以下のように立てられる。これより容器に生じる加速度も求められる。

$$M_2 a_2 = -f = \mu' M_1 g \rightarrow \therefore a_2 = \mu' \frac{M_1}{M_2} g$$



(カ) 容器から見た小物体の加速度を考えるには、小物体の(絶対)加速度も考えなければならない。ここで、小物体の(絶対)加速度を  $a_1$  とすると、小物体における運動方程式は以下のように立てられる。これより小物体に生じる加速度も求められる。

$$M_1 a_1 = f = -\mu' M_1 g \rightarrow \therefore a_1 = -\mu' g$$

以上より、容器から見た小物体の加速度は、以下のようにして求められる。

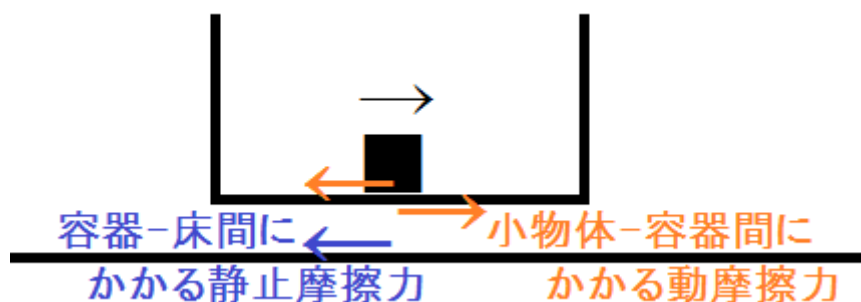
$$a_1 - a_2 = -\mu' g - \mu' \frac{M_1}{M_2} g = -\mu' \left(1 + \frac{M_1}{M_2}\right) g$$

(キ) 容器から見ると、小物体は加速度  $a_1 - a_2$  で等加速度運動しているように見えるので、容器から見た小物体の容器内での移動距離を  $x$  とすると、次の式が成り立つ。

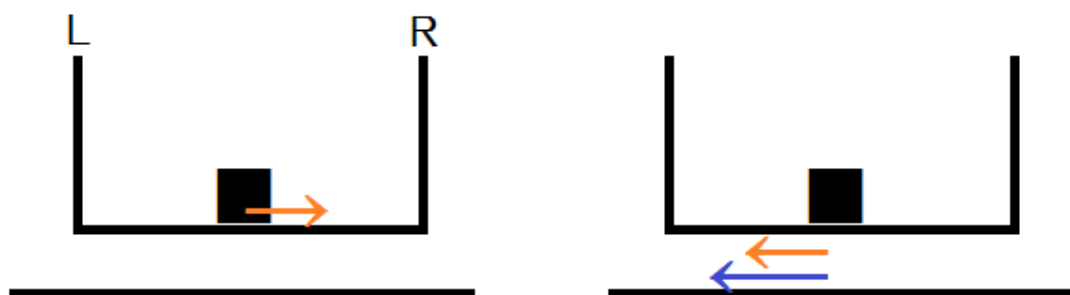
$$\begin{aligned} 0^2 - V_0^2 &= 2(a_1 - a_2)x \\ \rightarrow \therefore x &= \frac{-V_0^2}{2(a_1 - a_2)} = \frac{M_2 V_0^2}{2\mu'(M_1 + M_2)g} \end{aligned}$$

3) 小物体と容器、容器と床の間にそれぞれ摩擦がある場合を考える。

(ク) R に衝突する前、容器は静止していたので、「小物体と容器の間にかかる動摩擦力」と「容器と床の間にかかる静摩擦力」は同値である。ただし、「容器と床の間にかかる静摩擦力」は負の方向に向いている。これより、求める力は  $-f = -\mu' M_1 g$  である。



(ケ) R と衝突後の容器に対する小物体の(相対)加速度を求めるには、2 物体の(絶対)加速度を求める必要がある。(カ)と同様の解法である。



小物体は R と衝突後、L に向かって運動していくので、小物体と容器の間にかかる動摩擦力は正の向きに  $f = \mu' M_1 g$  だけかかるので、小物体における運動方程式は、小物体の(絶対)加速度を  $a'_1$  とすると、以下のように表される。

$$M_1 a'_1 = f = \mu' M_1 g$$

また容器には、小物体と容器の間にかかる動摩擦力(の反作用)  $-f$  と、容器と床の間にかかる動摩擦力  $F = -\mu'(M_1 + M_2)g$  がかかるので、容器における運動方程式は、容器の(絶対)加速度を  $a'_2$  とすると、以下のように表される。

$$M_2 a'_2 = -f + F = -\mu' M_1 g + \{-\mu'(M_1 + M_2)g\}$$

以上 2 式より、R と衝突後の容器に対する小物体の(相対)加速度は、以下のように求まる。

$$a'_1 - a'_2 = \mu' g - \frac{-\mu' M_1 g + \{-\mu'(M_1 + M_2)g\}}{M_2} = 2\mu' \frac{M_1 + M_2}{M_2} g$$

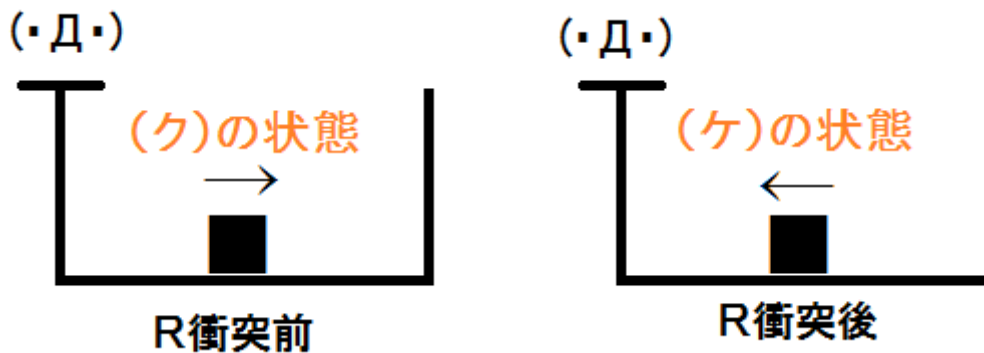
(コ) R に衝突前は、小物体は(ク)の状態に則って運動している。すなわち容器から見た小物体の運動は、加速度 $-\mu'g$  の等速直線運動で、距離 $d/2$  だけ移動したと分かる。これより R に衝突直前の小物体の速さを  $v$  とすると、以下の式が成り立つ。

$$v^2 - V_0^2 = 2(-\mu'g)\frac{d}{2}$$

R 衝突後は、小物体は(ケ)の状態に則って運動している。容器から見た小物体の運動が、加速度 $a'_1 - a'_2$  の等速直線運動で、距離  $X$  だけ R から移動したとする。これより以下の式が成り立ち、求める  $X$  が求まる。

$$0^2 - (-v)^2 = 2(a'_1 - a'_2)X$$

$$\therefore X = \frac{M_2(V_0^2 - \mu'dg)}{4\mu'(M_1 + M_2)g}$$



2.

1) 棒2を固定し、棒1をx方向に速度 $V_1$ で運動している時

(ア) 棒1には起電力 $BV_1d$ が発生する。これによって棒1,2には電流が流れるので、キルヒホッフの法則より、以下の式が成り立ち、流れる電流の値 $I_1$ が求まる。

$$BV_1d = R_1I_1 + R_2I_1 \rightarrow \therefore I_1 = \frac{BV_1d}{R_1 + R_2}$$

(イ) 磁場に電流が流れるとローレンツ力がかかる。また、この実験において棒1にかかるローレンツ力 $F$ は負の向きである。

$$F = -BI_1d = -\frac{B^2V_1d^2}{R_1 + R_2}$$

(ウ) 棒1,2に流れる電流の大きさは同値であるが、それぞれ抵抗値が異なる。これより、棒1で消費されるジュール熱 $J_1 = I_1^2R_1$ 、棒2で消費されるジュール熱 $J_2 = I_1^2R_2$ と表せるので、以下のことが分かる。

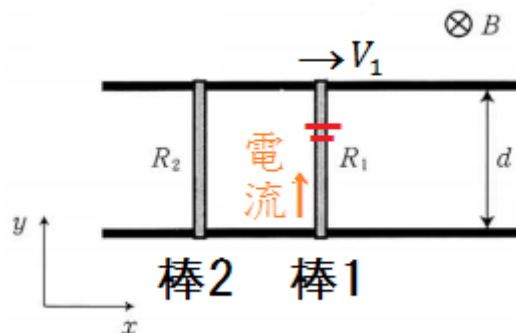
$$J_1:J_2 = R_1:R_2 \rightarrow J_1 = \frac{R_1}{R_2}J_2$$

(エ) 棒2を固定し、棒1をx方向に速度 $V_0$ で運動され、しばらくすると静止した。この過程において、棒1で持っていた運動エネルギーが棒1,2で発生するジュール熱に使われたので、エネルギー保存則より、以下の式が成り立つ。

$$\frac{1}{2}M_1V_0 = J_1 + J_2$$

この式と(ウ)の結果より、棒1で発生するジュール熱 $J_1$ が求まる。

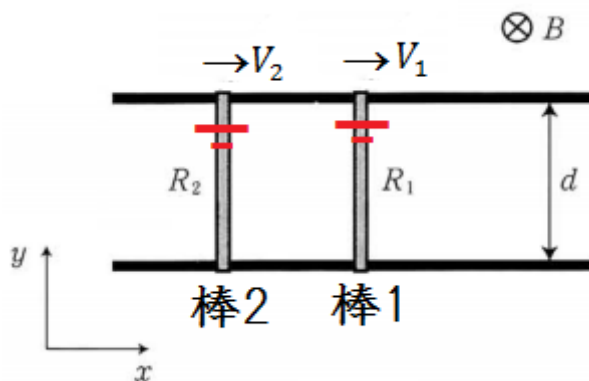
$$J_1 = \frac{R_1}{(R_1 + R_2)} \frac{1}{2}M_1V_0^2$$



2) 棒 1, 2 を正の方向にそれぞれ  $V_1, V_2$  で運動させた。

(オ) 棒 1, 2 での起電力はそれぞれ  $BV_1d, BV_2d$  である。また、棒 1, 2 に流れる電流はそれぞれ等しい( $I_2$  とする)ので、キルヒホッフの法則から、以下の式が成り立ち、これより  $I_1$  を求めることができる。

$$BV_1d - R_1I_2 - R_2I_2 - BV_2d = 0 \rightarrow \therefore I_1 = B \frac{V_1 - V_2}{R_1 + R_2} d$$



(カ) 次に棒 1 と棒 2 を互いに逆向きに速さ  $V_0$  で運動させ、しばらく時間が経つと電流は流れなくなった。この過程で 2 つの棒の間には互いに逆向きの同じ大きさの力がかかるため電流が流れなくなった時の棒 1, 2 の速度を  $V'_1, V'_2$  とすると、運動量保存則より次の式が成り立つ。

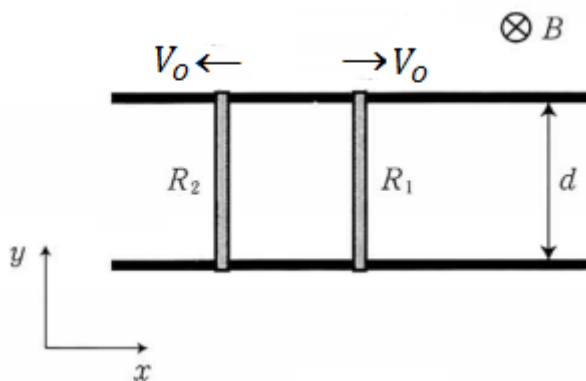
$$M_1V_0 + M_1(-V_0) = M_1V'_1 + M_2V'_2$$

また、しばらく時間が経つと、電流が流れなくなるので、(オ)から次のことがわかる。

$$B \frac{V'_1 - V'_2}{R_1 + R_2} d = 0 \rightarrow V'_1 = V'_2$$

以上 2 式より、 $V'_2$  を消去すると、 $V'_1$  が求まる。

$$V'_1 = \frac{M_1 - M_2}{M_1 + M_2} V_0$$



(キ) (エ)と同様、エネルギー保存則より、この過程で棒 1, 2 で生じるジュール熱を  $J'_1, J'_2$  とすると、以下の式が成り立つ。

$$\frac{1}{2}M_1V_0^2 + \frac{1}{2}M_2V_0^2 = J'_1 + J'_2 + \frac{1}{2}M_1V_1'^2 + \frac{1}{2}M_2V_2'^2$$

さらに、 $J'_1, J'_2$ の比はそれぞれの抵抗値によるので、以下の関係がなりたつ。

$$J'_1:J'_2 = R_1:R_2 \rightarrow J'_1 = \frac{R_1}{R_2}J'_2$$

以上 2 式より、 $J'_1$ が求まる。

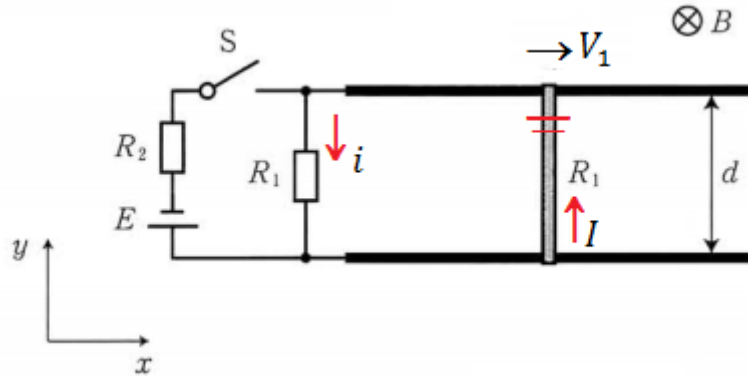
$$\therefore J'_1 = \frac{R_1}{R_1 + R_2} \frac{2M_1M_2}{M_1 + M_2} V_0^2$$

(3) 新しく回路を組む。

(ク) 速度  $V_1$  で動く棒 1 で発生する起電力は  $BV_1d$  である。仮に棒 1 に流れる電流を  $I$ 、抵抗  $R_1$  に流れる電流を  $i$  とすると、キルヒホッフの法則から、次の式が成り立つ。

$$BV_1d = R_1I + R_1i$$

$$BV_1d = R_1I + R_2(I - i) - E$$



上の 2 式より、 $i$  を消去すると、 $I$  が求まる。

$$\therefore I = \frac{BV_1d(R_1 + R_2) + R_1E}{R_1(2R_2 + R_1)}$$

(コ) 十分時間が経ち、電流が流れなくなるときの棒 1 の速度を  $v$  とする。

よって(ケ)より、次のことが分かる。

$$\frac{Bvd(R_1 + R_2) + R_1E}{R_1(2R_2 + R_1)} = 0 \rightarrow Bvd(R_1 + R_2) + R_1E = 0$$

$$\therefore v = -\frac{R_1E}{Bd(R_1 + R_2)}$$

3.

(ア) 状態 A での気体の温度を  $T_A$  とすると、気体の状態方程式より、以下の式が成り立つ。

$$P_0SL = 1RT_A \rightarrow \therefore T_A = \frac{P_0SL}{R}$$

(イ) 状態 B での気体の温度を  $T_B$  とすると、気体の圧力を  $P_B$  とすると、以下の式が成り立つ。

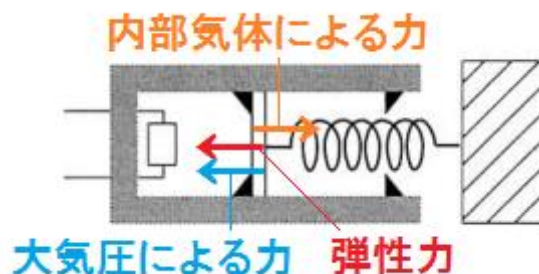
$$P_B 2SL = 1RT_B$$

また、力のつりあいより、次の式が成り立つ。

$$P_0S + kd = P_BS$$

以上 2 式より、 $P_B$  を消去すると、 $T_B$  が求まる。

$$\therefore T_B = \frac{P_0S + kd}{R}L$$

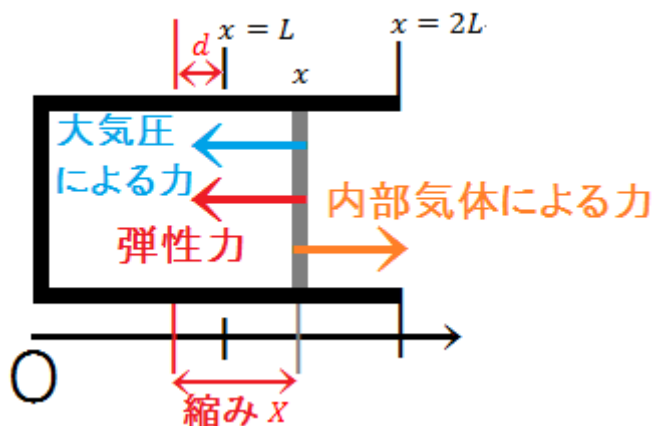


(ウ)  $A' \rightarrow B$  は定積変化。定積変化する気体 1[ $\text{mol}$ ] を 1[K] 上昇させるために与える熱量のことを「定積モル比熱」と呼ぶ。よって  $A' \rightarrow B$  で加えられる熱量  $Q_{A'B}$  とすると…

$$Q_{A'B} = \frac{3}{2}R(T_B - T_A) = \frac{3}{2}kdL$$

と求まる。

(エ)



$x = L$  の時点ではばねは  $d$  だけすでに縮んでいるので、 $B \rightarrow C$  間での弾性力を  $f(x)$ 、気体の圧力を  $P(x)$  とすると、力のつりあいの式は以下のようなになる。



$$P_0S + f(x) = P(x)S$$

また、弾性力  $f(x) = k(x - L + d)$  より、 $P(x)$  は以下のように求まる。

$$\therefore P(x) = P_0 + \frac{k(x - L + d)}{S}$$

(オ) B→C の過程で、気体が外部へ押す力を  $F(x)$  とすると、気体が外部へする仕事  $W_{BC}$  は以下のように計算される。

$$\begin{aligned} W_{BC} &= \int_L^{2L} F(x)dx = \int_L^{2L} P(x)S dx = \int_L^{2L} \left\{ P_0 + \frac{k(x - L + d)}{S} \right\} S dx \\ &= \left[ P_0Sx + \frac{1}{2}k(x - L + d)^2 \right]_L^{2L} = P_0SL + \frac{1}{2}kL(L + 2d) \end{aligned}$$

(カ) 過程 B→C で気体に与えられた熱量を  $Q_{BC}$ 、内部エネルギーの変化を  $\Delta U_{BC}$ 、状態 C での気体の温度を  $T_C$  とすると、熱力学第 1 法則より、以下の式が成り立つ。

$$Q_{BC} = \Delta U_{BC} + W_{BC} = \frac{3}{2}R(T_C - T_B) + P_0SL + \frac{1}{2}kL(L + 2d)$$

また、状態 C における状態方程式より、以下の式が成り立ち、 $T_C$  が求まる。

$$P(2L) \cdot 2SL = \left\{ \frac{k(L + d)}{S} + P_0 \right\} 2SL = RT_C$$

以上より、 $T_C, T_B$  を第一法則の式に代入すると、 $Q_{BC}$  が求まる。

$$\therefore Q_{BC} = \frac{1}{2}(7kL^2 + 5kdL + 5P_0SL)$$

(キ) D→A の変化は定圧変化(圧力は大気圧  $P_0$  に同じ)なので、気体が外部へする仕事  $W_{DA}$  は、

$$\therefore W_{DA} = -P_0SL$$

と求まる。

(ク) 1 サイクルで気体が外部へする仕事は  $W_{BC} + W_{DA}$ 、気体に入ってくる熱量は  $Q_{AB} + Q_{BC}$  であるので、1 サイクルでの熱効率  $e$  は、次のように表される。

$$e = \frac{W_{BC} + W_{DA}}{Q_{AB} + Q_{BC}} = \frac{P_0SL + \frac{1}{2}kL(L + 2d) - P_0SL}{\frac{1}{2}(7kL^2 + 5kdL + 5P_0SL) + \frac{3}{2}kdL} = \frac{kL(L + 2d)}{7kL^2 + 8kdL + 5P_0SL}$$

(コ) この 1 サイクルの状態変化の様子をまとめる。

A(A')→B : 定積変化

B → C : 圧力が  $x$  の 1 時関数に従って変化する状態変化

C(C')→D : 定積変化

D → A : 定圧変化

ここで、 $d = L = \frac{P_0 S}{k}$  なので、状態 B, C の圧力は、それぞれ以下のようにになる。

$$P_A = P(L) = \frac{kL}{S} + P_0 = 2P_0$$

$$P_B = P(2L) = \frac{k(L+d)}{S} + P_0 = 3P_0$$

また過程 B→C では、圧力が  $x$  の 1 次関数に従って変化するので、PV グラフ上での動きは直線的である。

以上より、求める PV グラフは以下の通りである。

